

Goodstein Sequences

The lonely passion of Phil Ramsden

What's a Goodstein sequence?

- Think of a number:
 - Let's say 77
- Express it in “binary”:
 - $77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 1$
- Express all indices in “binary”:
 - $77 = 2^{2^2} + 2^1 + 2^{2^1} + 1 + 2^{2^1} + 1$
- Express all indices of indices in “binary”:
 - $77 = 2^{2^2^1} + 2^1 + 2^{2^1} + 1 + 2^{2^1} + 1$

Iteration

- $g \downarrow 2 = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 1 + 2 \uparrow 1 + 2 \uparrow 2 \uparrow 1 + 1 + 2 \uparrow 2 \uparrow 1 + 1$
- Increase base by 1:
– $3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 1 + 3 \uparrow 1 + 3 \uparrow 3 \uparrow 1 + 1 + 3 \uparrow 3 \uparrow 1 + 1$
- Subtract 1:
– $3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 1 + 3 \uparrow 1 + 3 \uparrow 3 \uparrow 1 + 1 + 3 \uparrow 3 \uparrow 1$
- $g \downarrow 3 = 205891132094757$

Iteration

- $3 \uparrow^3 \uparrow^3 \uparrow^1 + 3 \uparrow^1 + 3 \uparrow^3 \uparrow^1 + 1 + 3 \uparrow^3 \uparrow^1$
- Increase base by 1:
 $- 4 \uparrow^4 \uparrow^4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^4 \uparrow^1 + 1 + 4 \uparrow^4 \uparrow^1$
- Subtract 1:
 $- 4 \uparrow^4 \uparrow^4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^4 \uparrow^1 + 1 + 3 \times 4 \uparrow^3 + 3 \times 4 \uparrow^2$
 $+ 3 \times 4 \uparrow^1 + 3$
- $g \downarrow 4 = \dots$

Iteration

- 343239883006530485749095039954069660863471
765007165270469723172959277159169882802606
127982033072727748864815569574042901856099
3999858321906287014145557529855
- $g \downarrow 4 = 3.43 \times 10 \uparrow 156$

Iteration

- $4 \uparrow^4 4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^1 + 4 \uparrow^4 \uparrow^1 + 1 + 3 \times 4 \uparrow^3 + 3 \times 4 \uparrow^2 + 3 \times 4 \uparrow^1 + 3$
- Increase base by 1:
 $- 5 \uparrow^5 5 \uparrow^1 + 5 \uparrow^1 + 5 \uparrow^5 \uparrow^1 + 1 + 3 \times 5 \uparrow^3 + 3 \times 5 \uparrow^2 + 3 \times 5 \uparrow^1 + 3$
- Subtract 1:
 $- 5 \uparrow^5 5 \uparrow^1 + 5 \uparrow^1 + 5 \uparrow^5 \uparrow^1 + 1 + 3 \times 5 \uparrow^3 + 3 \times 5 \uparrow^2 + 3 \times 5 \uparrow^1 + 2$
- $g \downarrow 5 = \dots$

Iteration

- 59719143685796172511137642490748893724940032780940448035609774663953766570081743844126855828
74187032079957625486857694485497539964605646788401281709112458131524880927366236568247755188
55639878508117354258156562963328476066608677578878591592014742801650861339123980473248549232
02471663100207558844118349035079763158439084658271074464714107810945518318576923224484730620
28542786812275398230751348591365173521198738669069079161081347980391642964490341124308407275
83268494682442259464667679023028569577541028669925667601790725514150931089644555076675693130
52288279392738838105002460022307408511103295198629810825037042140431022484831078297132273413
17518277852846703718624839644373572336459181290741175511226857749206763187659015873343139022
29126604112730979447043812147678136978062889390686566708561617471571059216851192911183436514
34368586908376338201127930748322977044462990759463513824547346322390342727678505365878851024
7025567896352346910233369474190933090213658913125224167163293479132189862959938840648523993
10422595687693214378892266950956564654626702057720256453432082599800300121480080784608460731
44883968018021959351832811048686759942934454715354100727960747823248630041510439775989484320
56703833943763461872139650324388085526015002824604988165373855008072252442730230445416633997
80283501715811131689652758122263931825743624332336401348648050288632840741097437169195081959
44377071452714620897193218152275080021659435915025963282631200774899751840900534760224759420
48696614833734991970462582514521418758543730814995607706129692976834268160773651593879902149
15907410150792294949776686749609205780328136945316402901250570809392578526933634355638877293
79448345689243290791407341193424678349978301943391030099609429485498758818782444113001517035
03247854100801038314895113239650927656902623425446345264809731223967570781089261516358477729
04623962776409189341859720203420043096719461420516604068334572975413446393912323244187440800
43770393603147868461647220805734192957583897529879207728992143257446090614648595390762319319
75597991322043958485541794526698892699318892817670603806731417338730044533326558079385335832
714193406712919836608282234493606799308196286801830865442752838134781717

Iteration

- $g_{15} = 5.97 \times 10^{2187}$

Iteration

- $5 \uparrow 5 \uparrow 5 \uparrow 1 + 5 \uparrow 1 + 5 \uparrow 5 \uparrow 1 + 1 + 3 \times 5 \uparrow 3 + 3 \times 5 \uparrow 2 + 3 \times 5 \uparrow 1 + 2$
- Increase base by 1:
 - $6 \uparrow 6 \uparrow 6 \uparrow 1 + 6 \uparrow 1 + 6 \uparrow 6 \uparrow 1 + 1 + 3 \times 6 \uparrow 3 + 3 \times 6 \uparrow 2 + 3 \times 6 \uparrow 1 + 2$
- Subtract 1:
 - $6 \uparrow 6 \uparrow 6 \uparrow 1 + 6 \uparrow 1 + 6 \uparrow 6 \uparrow 1 + 1 + 3 \times 6 \uparrow 3 + 3 \times 6 \uparrow 2 + 3 \times 6 \uparrow 1 + 1$
- $g \downarrow 6 = \dots$

Iteration

12406389208958094863286622565112272996390364569579358817161315222677546400947588100796534601783052800196155249795349768814486991874594007520316573398
31559597324943057652344018583105106584082371716865892566770837882641956448372674247322041404603882140221619575354723309248489344315107628208973266944
21158818715063819070831102898433582849805639496684098791754228002139303960135599044275926326063378080921941923600014665897682118662509917716606670650
50458165296738230551630308368554303385581530366485187259219326196047186827198426872891501884255080798469250013196397468302518725871851019853313862334
27388001453876236834719616105695204459188160282008454970926527443731590309842035233746045994461798051109201871600388075227926104854918109653631929038
79928967183073169114629022979096074429397601370296821403026745298157064161549232613558232553561069429340486271724917742446394128807848529679107574269
074816398445353663054027889381703837750728991133631776888036445998513227872895147231979257706400112247930244116058039024513620509189485846767479946150
4440251908688930235669163334300787577031112514884715787800528966441777210150612783351433552206850785232623368135144789183811618226038265583965275070
51796471344064091409651898487978559923327638346349764806223276880019953288709397605505274936732642538061902698937146168291470026396520542425915608705
05853332222058175772783589574134478504565635116152179361330596732637010194211032579171656677296732966141859087733875785958739510143990568238387507558
86482567551920303054005872281717255965615128187411532923781480806086416676856508520825085536893454789851432812235920983137782011784908255640612494777
90895940523710385404912393495542032624181397262726108173887456909476384559223794798802648457940455953685867078270973398468192438655914738967302735783
6694025620698905550663700593503974172153547097867033190544016667841943255489278032063855466608034699258409783577763487186927153129983322120234723323
97718538188977600795878409958773551283095203009843531982402562587521204846946675636454391794094421603466782837140897095648056011938200344829511967763
7828441087890933691004268783820645800542147973539949543479886087352085229658051908059386802878919141035381803442859323454102021462368987671066030649
775309955849215342371127373272844977139531391499023775720056006594041803129467704103727177073973963290231903021208647865181858344298716073197993936
39598283650054176246090802188560352260745040430109345342880362584899642437577004794941082049415022387653586375573221912331259620472008688429961355064
90253478975954186604577559889423213226661508308861769602692277079499367791700760894774618023004354959661447567625967002274070322812493308371788750
1121601029875897849814520226688131767375795126212184466948344002892523634426669945441986468259608395530908432180066502758362241004004510949628837609137
90273281992637307981541339562777403874973879466918473634579074436906441583951255206485456450542426711167110666813614696954416216667707022107022476708
7287561147332079131562234454636417636196052587147733648592670866807824990675438261620787006210884230181451851461952519756797373759640205722272825718
18961089902585859383596101266619181375378598207202422589942109562570872549527788954784179529165099967540381313057948882457689741157899591666228124188
6973804664874277286430303639305851643924075267194043785997845293165942555788874240195428742485772819425198605468275304057614752475382893727818570706
5932834064321045327901803711204123288333267222990136482459556805886046455923936684798440047659705473656240729919194560735308313956682160865556620203
57029825759685049831425389979665093950584454687753013376886410490331543444393248564954701950804568116983674597279263826099323614154685163481164352516
698500056720967795634611315116143210467165234962844451466670841107759888440045489765041551528888188310712192682004855374738936370136631187666121589
727163167020612661267399124070306751107930348926116766543053497137917937078178793947897917324741112202951866024409277746150969245743896581131879372
52318048894328469440980937713199353990401462909234318581633541890454558186964233017689035186027710996191202865302470125182331675095263822474286566075
660497399055159752219901945340489658767113045715208273490555525081436841592282134868715403505276597885302840051198996077810273572712907753564
7158848284655288431002122138463920190893847298801509725261573685727511593388977782878022488087800110967812542991321852799447961242316925990160210
0158838338047653692335204385448839947554155450101317225876624044762521080183855017778256000021421567457364060810108994187190474629733848439603633050693
8291659935813449342332280842935618537375876548732810681783344510052526838372498043996569988801622654607351763674058369365282718972758453623737561
66711665232129292120307116505077721472113883463345139754824640068733829387558182113330423858891349932481958581710923710228314534437983992193511394949
439998124905535136194189102141692982123707879726091982724493016565654382531109098952694392579760351833701405772979450778304320277517209097650839143942
8965746597855066280827848294235913823156706814184490204034773540852921952765495673678616907848435049523938681966191713279724378182089002670819916917
34510179663904665795935802074473384197235653063984522958682991889500474125319681238510851121663145051590018101601410928378191081007860578761527596761
286435509521990166915881520952850951406528782431659553512627865551690603297609426413644326446236516734093906897860235149332004739556442090617334381764
3540102780439365569331344179178712854815326646122323796408752089658065983677432993206684800132272904811813328025426390452321096379869991835512557
97349418498250532851657325848498852322921490550592862754195881684493326644932896489901478751818951396775299787962763946362126014567431179339587716176
44207850578401227125867971012038090397352053593905320552191980102128861033019376460714842805483732179846138260706714876730841201666936368529826400401
44783989859743798758264683201204205815657509961879619577887757697449280705813139660800854650983952364315156318531392548418138973321757126736886086820
748085192060412491233717519547894850195713455046706068397755778190951870619983869569264863841015077127889268875396599272913999526276631469687006460714
76998025164850420358352010024524765115161007569640639332427328203376522082026366642468637423431751372700961589426455491708442787796264951560559428736989261
918429552237235931194927650535921032342268321200385716320558675497367360571681071876976489649687003076334632185040385824379925360321163160181408205
0523932966259280146665862063575247753160978845632880965559620782086381864955629886735344384018332823825405636188775693029861505334755289554477811059624
4649194222002933394316557518468265908812001212777848897855675037317515871318643128415380131712229178343657648525491911308341636588028750433614962
478608396513870540570259121938355348965147349245046376236983158766700645668148710022074325872772764600571540999816214920505941114630598141506432202
285629272757838091840845410031855678530316203653248528375483306421966705608497698508083490345031369989615323232710038791903935433682788658624774546
5767603918274450748821948260019276190491354383631209765762441986186027397870934323975766523746965682396718480758180866668736478526895168181825273422
225485677529137074246375947964925106630506556697671819209091918459641895821621635841949596552737866762137831219121630404043488702593974299343665
8614730842409291423963737342451462390473750405813942609873793708423445232333459720882320975346692410920414239804090890406242343450620

Iteration

- $g_{16} = 1.24 \times 10^{136310}$

Question

- What's the long-term behaviour of this Goodstein sequence?

Amazing Fact 1

- This Goodstein sequence eventually hits zero.

Amazing Fact 2

- *All* Goodstein sequences eventually hit zero.

Amazing Fact 3

- But this wasn't proved using the axioms of arithmetic.

Amazing Fact 4

- This *can't* be proved using the axioms of arithmetic.
- Nonetheless, it's true.

Amazing Fact 5

- So “All Goodstein sequences eventually hit zero” is a **natural Gödel sentence** for arithmetic.

This kind of blows my mind

- But I'm not sure I can easily explain why to non-maths types.
- Any ideas... ?